Operacije i algebarske strukture

Grupoid, polugrupa i grupa

Definicija Pod binarnom operacijom u skupu A podrazumijevamo preslikavanje $f: A\times A \to B$ (sa A^2 u B).
Pod operacijom dužine $n\in\mathbb{N}$ u skupu A podrazumijevamo preslikavanje $f: A^n = A\times A\times \ldots \times A \to B$ (sa A^n u B).
Ako je $n=1$ govorimo o unarnoj operaciji.
Ako je $n=3$ govorimo o ternarnoj operaciji.

Umjesto funkcionalnog znaka f pisat ćemo neko od znakova $*$, $\circ$, $\square$, $\oplus$, $\otimes$, $+$, $\cdot$ itd.

Primjer a) Preslikavanje $+: \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ je binarna operacija u skupu $\mathbb{N}$. Umjesto $+(3,5)=8$ pišemo $3+5=8$.
b) Preslikavanje $\bar{\ }: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$, definisano na sljedeći način $z=a+ib$ preslikava u $\bar{z}=a-ib$, je unarna operacija u skupu kompleksnih brojeva.
c) Preslikavanje $V: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definisano na sljedeći način $V(a,b,c)=a\cdot b\cdot c$ je ternarna operacija u skupu realnih brojeva (V u geometriji predstavlja zapreminu kvadra ili kocke).
d) Preslikavanje $-: \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ je binarna operacija u skupu $\mathbb{N}$. Umjesto $-(3,45)=-42$ pišemo $3-45=-42$.

Definicija Uređeni par $(G,\circ)$ skupa G i operacije $\circ: G\times G\to G$ nazivamo grupoid.

U literaturi se često pored riječi grupoid koristi i termin da je skup G zatvoren u odnosu na operaciju $\circ$, tj. za $\forall a,b\in G$ imamo da je $a\circ b\in G$.

Primjer a) Uređeni par $(\mathbb{N},\cdot)$ skupa prirodnih brojeva i operacije množenja jest grupoid.
b) Uređeni par $(\mathbb{Q},:)$ skupa racionalnih brojeva i operacije dijeljenja jest grupoid.
c) Uređeni par $(\mathbb{I},\cdot)$ skupa iracionalnih brojeva i operacije množenja nije grupoid, jer npr. $\sqrt{2}\in\mathbb{I}$ ali $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2\notin\mathbb{I}$
d) Uređeni par $(\mathbb{Z},:)$ skupa cijelih brojeva i operacije dijeljenja nije grupoid (objasniti zašto?).

Definicija Za operaciju $\circ$ zadanu u skupu G kažemo da je
a) asocijativna akko $\forall(a,b,c\in G)$ $a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c$.
b) komutativna akko $\forall(a,b\in G)$ $a\circ b=b\circ a$

Primjer a) Operacija množenja jest asocijativna u skupu $\mathbb{Q}$.
b) Množenje matrica nije komutativna operacija (kako se množe dvije matrice vidjećemo kasnije)

Definicija Ako je u grupoidu $(G,\circ)$ operacija $\circ$ asocijativna onda onda kažemo da je uređeni par $(G,\circ)$ polugrupa.

Primjer a) $(\mathbb{R},+)$ je polugrupa.
b) $(\mathbb{C},\cdot)$ je polugrupa.

Definicija Element e grupoida $(G,\circ)$ naziva se neutralni element akko za njega vrijedi $\forall(x\in G)$ $e\circ x=x\circ e=x$.

Primjer a) Grupoid $(\mathbb{Z},+)$ ima neutralni element 0,
b) Grupoid $(\mathbb{R},\cdot)$ ima neutralni element 1.
c) Grupoid $(\mathbb{N},+)$ nema neutralni element. (Zašto?)

Definicija Neka je $(G,\circ)$ polugrupa sa neutralnim elementom e. Za element $a\in G$ kažemo da ima inverzni element $a^{-1}\in G$ akko $\forall(a\in G)\ \exists(a^{-1}\in G)\ a^{-1}\circ a=a\circ a^{-1}=e$.

Primjer a) Polugrupa $(\mathbb{Z},+)$ ima inverzni element zato što

$$\forall(a\in\mathbb{Z})\ \exists(-a\in\mathbb{Z})\quad a+(-a)=(-a)+a=0.$$

b) Polugrupa $(\mathbb{R},\cdot)$ ima inverzni element zato što

$$\forall(a\in\mathbb{R})\ \exists\left(\tfrac{1}{a}\in\mathbb{R}\right)\quad a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1.$$

c) Polugrupa $(\mathbb{N}\cup\{0\},+)$ nema inverzni element (Zašto?)

Definicija Polugrupa $(G,\circ)$ s neutralnim elementom e u kojoj svaki element $a\in G$ ima inverzni element $a^{-1}\in G$ nazivamo grupa.

Abelova grupa

Definicija Komutativnu grupu $(G,\circ)$ nazivamo Abelova grupa.

(#) Dokažite da je $G=\{a\in\mathbb{R}\mid a>0,\ a\neq 1\}$ sa operacijom $a*b=a^{\log_5 b}$ grupa.

Rj: Trebamo pokazati da je operacija $*$ zatvorena, asocijativna, da postoji neutralni element i da postoji inverzni element.

ZATVORENOST

$$\forall(a,b\in G)\quad a*b=a^{\log_5 b}\in\mathbb{R}$$

Kako je $a>0$ i $a\neq 1$ $(a\in G)$ to je i

$a*b>0$ i $a*b\neq 1$ $\Rightarrow$ $a*b\in G$

Operacija $*$ je zatvorena

ASOCIJATIVNOST

$$\forall(a,b,c\in G)\quad (a*b)*c=a^{\log_5 b}*c=\left(a^{\log_5 b}\right)^{\log_5 c}=a^{\log_5 c\cdot\log_5 b}\quad \ldots(1)$$

$$a*(b*c)=a*b^{\log_5 c}=a^{\log_5 b^{\log_5 c}}=a^{\log_5 c\cdot\log_5 b}\quad \ldots(2)$$

(1) i (2) $\Rightarrow$ $(a*b)*c=a*(b*c)$ Operacija $*$ je asocijativna

NEUTRALNI ELEMENT

$$\forall(a\in G)(\exists e\in G)\quad a*e=a$$

$$a^{\log_5 e}=a$$

$$e=5$$

Neutralni element je 5

INVERZNI ELEMENT

$$\forall(a\in G)\ \exists(a^*\in G)\quad a*a^*=5$$

$$a^{\log_5 a^*}=5\quad /\log_5$$

$$\log_5 a^{\log_5 a^*}=\log_5 5$$

$$\log_5 a^*\cdot\log_5 a=1$$

$$\log_5 a^*=\frac{1}{\log_5 a}$$

$$\log_5 a^*=\log_a 5$$

$$a^*=5^{\log_a 5}$$

Inverzni element elementa a je $5^{\log_a 5}$.

Skup G sa operacijom $*$ jest grupa. q.e.d.

U skupu cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ definisana je binarna operacija $\oplus$ na sljedeći način $x \oplus y = x + y - 1$. Dokazati da je $(\mathbb{Z}, \oplus)$ Abelova grupa.

Rj. Trebamo pokazati da je operacija $\oplus$ zatvorena, asocijativna, da postoji neutralni element, da postoji inverzni element i da je operacija komutativna.

ZATVORENOST $(\forall (x, y \in \mathbb{Z})\ x \oplus y \in \mathbb{Z})$

Ako su $x, y \in \mathbb{Z}$ tada $x + y - 1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \oplus y \in \mathbb{Z}$

operacija $\oplus$ je zatvorena

ASOCIJATIVNOST $(\forall (x, y, z \in \mathbb{Z})\ (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z))$

$$(x \oplus y) \oplus z = (x + y - 1) \oplus z = (x + y - 1) + z - 1 = x + (y + z - 1) - 1 = x \oplus (y + z - 1)$$
$$= x \oplus (y \oplus z)$$

oper. $\oplus$ je asocijativna

NEUTRALNI ELEMENT $(\forall (x \in \mathbb{Z})\ \exists (e \in \mathbb{Z})\ x \oplus e = e \oplus x = x)$

$x \oplus e = x$

$x + e - 1 = x$

$e - 1 = 0$

$e = 1$

$1 \oplus x = 1 + x - 1 = x$

Neutralni element je 1.

INVERZNI ELEMENT $(\forall (x \in \mathbb{Z})\ \exists (x^* \in \mathbb{Z})\ x \oplus x^* = x^* \oplus x = e)$

$x \oplus x^* = 1$

$x + x^* - 1 = 1$

$x^* = -x + 2$

Inverzni element elementa $x \in \mathbb{Z}$ je $x^* = -x + 2$

$(-x + 2) \oplus x = -x + 2 + x - 1 = 1$

KOMUTATIVNOST $(\forall (x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z})\ x \oplus y = y \oplus x)$

$x \oplus y = x + y - 1 = y + x - 1 = y \oplus x$

operacija $\oplus$ je komutativna

$(\mathbb{Z}, \oplus)$ jest Abelova grupa

q.e.d.

Ispitati da li uređen par $(\mathbb{R}^+, *)$, $\mathbb{R}^+$ je skup pozitivnih realnih brojeva a operacija $*$ je definisana $a * b = a^b$, ima strukturu grupe.

Rj. Trebamo da li je operacija $*$ na skupu G zatvorena, asocijativna, da li postoji neutralni element i da li postoji inverzni element.

ZATVORENOST

$\forall (a, b \in \mathbb{R}^+)\ a * b = a^b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a * b \in \mathbb{R}^+$

operacija $*$ je zatvorena

ASOCIJATIVNOST

$$\forall (a, b, c \in \mathbb{R}^+) \quad \left.\begin{array}{l} (a * b) * c = a^b * c = (a^b)^c = a^{bc} \\ a * (b * c) = a * b^c = a^{b^c} \end{array}\right\} \Rightarrow a^{bc} \neq a^{b^c}$$

$\Rightarrow (a * b) * c \neq a * (b * c)$

operacija $*$ nije asocijativna

$(\mathbb{R}^+, *)$ nije grupa

Ispitati da li skup $S=\left\{\frac{1+2m}{1-2n} \mid m,n \in \mathbb{Z}\right\}$ u odnosu na operaciju "obično" množenje ima strukturu grupe.

Rj. Trebamo ispitati da li je operacija "obično" množenje zatvorena, asocijativna, da li postoji neutralni element i da li postoji inverzni element.

ZATVORENOST

$\forall(x,y \in S)$ $x \cdot y = \frac{1+2m_1}{1-2n_1} \cdot \frac{1+2m_2}{1-2n_2} = \frac{1+2m_2+2m_1+4m_1m_2}{1-2n_2-2n_1+4n_1n_2} =$

$x=\frac{1+2m_1}{1-2n_1}$, $y=\frac{1+2m_2}{1-2n_2}$

$$= \frac{1+2\overbrace{(m_1+m_2+2m_1m_2)}^{\in \mathbb{Z}}}{1-2\underbrace{(n_1+n_2-2n_1n_2)}_{\in \mathbb{Z}}} \in S$$

Operacija "obično" množenje je zatvorena u odnosu na S

ASOCIJATIVNOST

$\forall(x,y,z \in S)$ $(x \cdot y)\cdot z = \left(\frac{1+2m_1}{1-2n_1} \cdot \frac{1+2m_2}{1-2n_2}\right) \cdot \frac{1+2m_3}{1-2n_3} = \frac{1+2m_1}{1-2n_1}\left(\frac{1+2m_2}{1-2n_2} \cdot \frac{1+2m_3}{1-2n_3}\right)$

$= x \cdot (y \cdot z)$ operacija "obično" množenje je asocijativna u odnosu na S

NEUTRALNI ELEMENT

$\forall(x \in S)\ \exists(e \in S)$ $x \cdot e = x$

$$\frac{1+2m}{1-2n} \cdot e = \frac{1+2m}{1-2n} \Rightarrow e = 1 = \frac{1+2\cdot 0}{1-2\cdot 0} \in S$$

Neutralni element je 1.

INVERZNI ELEMENT

$\forall(x \in S)\ \exists(x^* \in S)$ $x \cdot x^* = 1$

$$\frac{1+2m}{1-2n} \cdot x^* = 1 \Rightarrow x^* = \frac{1-2n}{1+2m} = \frac{1+2(-n)}{1-2(-m)} = \frac{1+2k}{1-2p},\ k,p \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow x^* \in S \Rightarrow$ Postoji neutralni element

Skup S u odnosu na operaciju "obično" množenje ima strukturu grupe. q.e.d.

Dat je skup $G=\{a,b,c\}$. Koliko ima različitih binarnih operacija $*$ tako da je $(G,*)$ grupoid? Koliko je među njima komutativnih grupoida?

Rj. Uređen par $(G,*)$ skupa G i operacije $*: G\times G \to G$ nazivamo grupoid. (za operaciju $*$ kažemo da je zatvorena u G). Definisat ću jednu od mogućih izgleda operacije $*$ tako da $(G,*)$ bude grupoid:

$*$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	a	a
c	a	a	a

G ima tri elementa,

G^2 će imati $3^2=9$ elemenata,

Različitih grupoida ima 3^9.

Operacija $*$ je komutativna ako je $a*b=b*a$.

Pokažimo primjer operacije $*$ tako da grupoid bude komutativan:

$*$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	b
c	b	b	c

Da bi grupoid bio komutativan mi elemente na dijagonali i ispod nje možemo uzeti proizvoljno dok preostala tri člana upisujemo tako da tablica bude simetrična.

Komutativnih grupoida ima 3^6.

(#) Neka je $(G,\circ)$ grupa. Na G je definisana i operacija $*$ na sljedeći način $x * y = x \circ g \circ y$ gdje je g fiksiran element iz G. Dokazati da je $(G,*)$ grupa.

Rj. Trebamo pokazati da je $(G,*)$ grupa tj. da je operacija $*$ na skupu G zatvorena, asocijativna, da postoji neutralni element, da postoji inverzni element i da je operacija $*$ komutativna.

ZATVORENOST

$\forall(x,y \in G)$ $x * y = x \circ g \circ y \in G$ zato što je operacija $\circ$ zatvorena ($(G,\circ)$ je grupa).

operacija $*$ je zatvorena

ASOCIJATIVNOST

$\forall(x,y,z \in G)$ $(x*y)*z = (x \circ g \circ y) * z = (\underbrace{x}_{a} \circ \underbrace{g \circ y)}_{b} \circ \underbrace{g \circ z}_{c}$

$x*(y*z) = x * (y \circ g \circ z) = x \circ g \circ (y \circ g \circ z)$

Operacija kružić je asocijativna (zato što je $(G,\circ)$ grupa)
$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

$\Rightarrow$ $(x*y)*z = (x \circ g \circ y) \circ g \circ z = x \circ g \circ (y \circ g \circ z) = x * (y * z)$

operacija $*$ jest asocijativna

NEUTRALNI ELEMENT

$\forall(x \in G)$ $\exists(e \in G)$ $x * e = x$
$x \circ g \circ e = x$ $\Rightarrow$ kako je $(G,\circ)$ grupa, to je $g \circ e$ neutralni element operacije $\circ$

$(G,\circ)$ je grupa $\Rightarrow$ $\forall(g \in G)$ $\exists(g^{-1} \in G)$ $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = g \circ e$
G ima inverzni element u odnosu na operaciju $\circ$

$\Rightarrow$ $e = g^{-1}$

Neutralni element skupa G u odnosu na operaciju $*$ je g^{-1}.

INVERZNI ELEMENT

$\forall(x \in G)$ $\exists(x^* \in G)$ $x * x^* = g^{-1}$
$x \circ g \circ x^* = g^{-1}$ $/ x^{-1} \circ$ sa lijeve strane

x^{-1} je inverzni element elementa x u odnosu na operaciju $\circ$
$e' \circ g \circ x^* = x^{-1} \circ g^{-1}$
(e' neutralni element u odnosu na oper. $\circ$)

$g \circ x^* = x^{-1} \circ g^{-1}$ $/ g^{-1} \circ$ sa lijeve strane

$e' \circ x^* = g^{-1} \circ x^{-1} \circ g^{-1}$ $\Rightarrow$ $x^* = g^{-1} \circ x^{-1} \circ g^{-1}$

Inverzni element elementa x je $g^{-1} \circ x^{-1} \circ g^{-1}$

$(G,*)$ jest grupa
q.e.d.

(#) Neka je G skup svih realnih brojeva oblika $x+y\sqrt{2}$ gdje su x i y racionalni brojevi koji nisu istovremeno jednaki nuli, a $\cdot$ operacija množenja. Dokazati da je $(G,\cdot)$ grupa.

Rj: $G=\{x+y\sqrt{2} \mid x,y\in\mathbb{Q},\ x^2+y^2>0\}$

ZATVORENOST

$(G,\cdot)$ grupoid, $\cdot : G\times G \to G$

$$\begin{array}{l} x_1+y_1\sqrt{2}\in G \\ x_2+y_2\sqrt{2}\in G \end{array} \Rightarrow (x_1+y_1\sqrt{2})(x_2+y_2\sqrt{2}) = x_1x_2 + x_1y_2\sqrt{2} + x_2y_1\sqrt{2} + 2y_1y_2 =$$

$$= \underbrace{(x_1x_2+2y_1y_2)}_{\in\mathbb{Q}} + \underbrace{(x_1y_2+x_2y_1)}_{\in\mathbb{Q}}\sqrt{2} = s$$

Da bi bilo $s\in G$ trebamo još provjeriti da li je ispunjen uslov

$(x_1x_2+2y_1y_2)^2+(x_1y_2+x_2y_1)^2>0$

Prema pretpostavci je $x_1^2+y_1^2>0$ i $x_2^2+y_2^2>0$ tj. $(x_1\neq 0 \vee y_1\neq 0) \wedge (x_2\neq 0 \vee y_2\neq 0)$

Ako je $x_1y_2+x_2y_1\neq 0$ dokaz za zatvorenost je gotov.

Pretpostavimo $x_1y_2+x_2y_1=0 \Rightarrow x_1y_2=-x_2y_1$

$$y_2=-\frac{x_2y_1}{x_1} \Rightarrow x_1 \quad +2y_1y_2 =$$

$$= x_1x_2+2y_1\left(-\frac{x_2y_1}{x_1}\right) = \frac{x_1^2x_2-2x_2y_1^2}{x_1} = \frac{x_2(x_1^2-2y_1^2)}{x_1} \neq 0$$

jer ako bi bilo $x_1^2-2y_1^2=0 \Rightarrow x_1^2=2y_1^2$

$\frac{x_1}{y_1}=\sqrt{2}$ # kontradikcija ($x_1,y_1\in\mathbb{Q}$)

Prema tome $s=(x_1x_2+2y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)\sqrt{2}\in G$

ASOCIJATIVNOST

$a=(a_1+a_2\sqrt{2}),\ b=(b_1+b_2\sqrt{2}),\ c=(c_1+c_2\sqrt{2})$

$a,b,c\in G \Rightarrow a,b,c\in\mathbb{R}$

Operacija množenja je asocijativna u $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\cdot$ u G jest asocijativno

NEUTRALNI ELEMENT

Za proizvoljan $x\in G$ $(x=x_1+y_1\sqrt{2})$ neutralni element je $1\in G$

$(1=1+0\sqrt{2})$ $\quad 1\cdot x = x\cdot 1 = x$

INVERZNI ELEMENT

$a\in G \Rightarrow a=a_1+a_2\sqrt{2}$

$a\cdot a' = a'\cdot a = 1$

$(a_1+a_2\sqrt{2})(a_1+a_2\sqrt{2})'=1 \Rightarrow a'=\frac{1}{a_1+a_2\sqrt{2}}=\dots$ ZAVRŠITI ZA VJEŽBU

Za proizvoljan $a\in G$ inverzni element je $a'=\frac{a_1}{a_1^2-2a_2^2}+\frac{-a_2}{a_1^2-2a_2^2}\sqrt{2}\in G$

Zaključak: $(G,\cdot)$ je grupa

(#) Skup G čine f-je

$f_1(x)=x,\quad f_2(x)=\frac{1}{1-x},\quad f_3(x)=\frac{x-1}{x},\quad f_4(x)=\frac{1}{x},\quad f_5(x)=1-x$

$f_6(x)=\frac{x}{x-1}$.

a) Napraviti Kajlijevu tablicu za operaciju $\circ$ (kompozicija f-ja) na skupu G

b) Provjeriti da li je struktura $(G,\circ)$ grupa.

Rj: a) Napišimo sve kompozicije

$f_1\circ f_1(x)=f_1(x)=x=f_1(x)$

$f_1\circ f_2(x)=f_1\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{1-x}=f_2(x)$

$f_1\circ f_3(x)=f_1\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{x-1}{x}=f_3(x)$

$f_2\circ f_2(x)=f_2\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{1-x}{-x}=f_3(x)$

$f_2\circ f_3(x)=f_2\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{1}{1-\frac{x-1}{x}}=x=f_1(x)$

$f_2\circ f_4(x)=f_2\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{x}{x-1}=f_6(x)$

ZA VJEŽBU NAĆI SVE OSTALE KOMPOZICIJE

Kajlijeva tablica

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_3	f_1	f_6	f_4	f_5
f_3	f_3	f_1	f_2	f_5	f_6	f_4
f_4	f_4	f_5	f_6	f_1	f_2	f_3
f_5	f_5	f_6	f_4	f_3	f_1	f_2
f_6	f_6	f_4	f_5	f_2	f_3	f_1

b) zatvorenost $\forall (f_a,f_b\in G)\ f_a\circ f_b\in G$ (tablica)

asocijativnost $\forall (f_a,f_b,f_c\in G)\ (f_a\circ f_b)\circ f_c = f_a\circ(f_b\circ f_c)$ (iz osobina binarnih relacija)

neutralni element je f_1 jer $\forall (f_a\in G)\ f_1\circ f_a = f_a\circ f_1 = f_a$

inverzni element – za f_1 je f_1 jer $f_1\circ f_1 = f_1\circ f_1 = f_1$

za f_2 je f_3 jer $f_2\circ f_3 = f_2\circ f_2 = f_1$

za f_3 je f_2,

za f_4 je f_4 za f_5 je f_5 i za f_6 je f_6 (ZAŠTO?) $\Rightarrow$

$(G,\cdot)$ ima strukturu grupe

(#) Je li skup $U=\{X\in M_2(\mathbb{C}) \mid \det(X)=1\}$ uz standardno množenje matrica grupa? (Skup $M_2(\mathbb{C})$ je skup svih matrica formata 2×2 sa elementima iz skupa kompleksnih brojeva).

Rj. Za neki skup S u kojem je definisana neka operacija $\circ$ kažemo da je grupa ako za svaka dva elementa iz S ($\forall a,b\in S$) imamo $a\circ b\in S$; za $\forall c\in S$ $a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c$; $\forall a\in S\ \exists e\in S$ $a\circ e=e\circ a=a$; i $\forall a\in S\ \exists a^{-1}\in S$ $a\circ a^{-1}=a^{-1}\circ a=e$.

Uzmimo tri proizvoljna elementa iz U, $A\in U$, $B\in U$ i $C\in U$. Tada imamo $\det(A)=1$, $\det(B)=1$, $\det(C)=1$.

Ako je $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}$ i $C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{bmatrix}$ tada

$\det A = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=1$, $\det B = b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}=1$ i

$\det C = c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}$.

Provjerimo da li skup U zadovoljava četri navedena uslova.

a) zatvorenost $\forall A,B\in U$ $A\cdot B\in U$

$$A\cdot B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{bmatrix}$$

Da li je $A\cdot B\in U$. Izračunajmo $\det(AB)$.

$$\det(A\cdot B)=\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{vmatrix}=\cancel{a_{11}a_{21}b_{11}b_{12}}+a_{11}a_{22}b_{11}b_{22}$$
$$+a_{12}a_{21}b_{12}b_{21}+\cancel{a_{12}a_{22}b_{21}b_{22}}-\cancel{a_{11}a_{21}b_{11}b_{12}}-a_{11}a_{22}b_{12}b_{21}-a_{12}a_{21}b_{11}b_{22}$$
$$-\cancel{a_{12}a_{22}b_{21}b_{22}}=a_{11}a_{22}\underbrace{(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})}_{=1}-a_{12}a_{21}\underbrace{(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})}_{=1}=1$$

Prema tome $A\cdot B\in U$. U je zatvoren.

b) asocijativnost $\forall A,B,C\in U$ $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$

Od ranije znamo da je množenje matrica asocijativno.
Ovaj korak možete uraditi za vježbu.

c) jedinični element $\forall A\in U$ $\exists I\in U$ $A\cdot I=I\cdot A=A$

Jedinični element za množenje matrica je $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$$

Da li je $I\in U$ $\quad \det I=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$ $\quad I\in U$ postoji jedinični element

d) inverzni element $\forall A\in U$ $\exists A^{-1}\in U$ t.d. $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$

Inverzni element za matricu je $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\cdot A_{adj}$

$A_{adj}=A_{kof}^{T}$ $\quad$ Tad znamo da je $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$.

Provjerimo da li je $A^{-1}\in U$

$\det A=1$ $\quad$ Pronađimo kofaktore

$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ $\quad A_{11}=(-1)^2\cdot a_{22}=a_{22}$ $\quad A_{21}=(-1)^3\cdot a_{12}=-a_{12}$

$A_{12}=(-1)^3\cdot a_{21}=-a_{21}$ $\quad A_{22}=(-1)^4\cdot a_{11}=a_{11}$

$A_{kof}=\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11}\end{bmatrix}$ $\quad A_{adj}=\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}$

$A^{-1}=\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}$ $\quad \det A^{-1}=\begin{vmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=1$

$A^{-1}\in U$ tj. Svaka matrica ima neutralni element.

Skup U uz standardno množenje matrica jest grupa.

(#) Neka je M skup matrica oblika $\begin{bmatrix} a&0&b\\0&c&0\\b&0&a\end{bmatrix}$, $(a,b,c\in R)$. Koji uslov moraju zadovoljavati a, b i c da bi matrice iz M bile regularne? Za tako određeno a, b i c dokazati da skup M u odnosu na operaciju množenja ima strukturu grupe. Da li je grupa Abelova?

R: Za matricu A kažemo da je regularna ako je $\det A\neq 0$.

$$A=\begin{bmatrix} a&0&b\\0&c&0\\b&0&a\end{bmatrix}\qquad \det A=\begin{vmatrix} a&0&b\\0&c&0\\b&0&a\end{vmatrix}\overset{I_k+III_k}{=}\begin{vmatrix} a+b&0&b\\0&c&0\\a+b&0&a\end{vmatrix}\overset{I_v-III_v}{=}$$

$$=\begin{vmatrix} 0&0&b-a\\0&c&0\\a+b&0&a\end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix}0&c\\a+b&0\end{vmatrix}=(a-b)(a+b)c$$

Da bi matrice iz skupa M bile regularne potrebno je i dovoljno da je $a\neq\pm b$ i $c\neq 0$.

Za $a\neq\pm b$ i $c\neq 0$ pokažimo da skup M u odnosu na operaciju množenja ima strukturu grupe.

(a) zatvorenost: $\forall A,B\in M\ A\cdot B\in M$

$$\begin{bmatrix} a_1&0&b_1\\0&c_1&0\\b_1&0&a_1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_2&0&b_2\\0&c_2&0\\b_2&0&a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1a_2+b_1b_2&0&a_1b_2+a_2b_1\\0&c_1c_2&0\\a_2b_1+a_1b_2&0&b_1b_2+a_1a_2\end{bmatrix}$$

Kako je $c_1\neq 0$ i $c_2\neq 0\Rightarrow c_1c_2\neq 0$.

Da bi matrica $\begin{bmatrix} a_1a_2+b_1b_2&0&a_1b_2+a_2b_1\\0&c_1c_2&0\\a_2b_1+a_1b_2&0&b_1b_2+a_1a_2\end{bmatrix}$ bila u skupu M potrebno je

još da je $a_1a_2+b_1b_2\neq\pm(a_2b_1+a_1b_2)$ tj. $a_1a_2+b_1b_2\neq a_2b_1+a_1b_2$ i $a_1a_2+b_1b_2\neq -a_2b_1-a_1b_2$.

$a_1a_2+b_1b_2\neq a_2b_1+a_1b_2$

$a_1a_2-a_1b_2\neq a_2b_1+b_1b_2$

$a_1(a_2-b_2)\neq b_1(a_2-b_2)$

$a_1(a_2-b_2)-b_1(a_2-b_2)\neq 0$

$(a_1-b_1)(a_2-b_2)\neq 0$

Ovo je tačno za sve $a_1,a_2,b_1,b_2\in R$ zato što je $a_1\neq\pm b_1$ i $a_2\neq\pm b_2$.

$a_1a_2+b_1b_2\neq -a_2b_1-a_1b_2$

$a_1a_2+a_1b_2+b_1b_2+a_2b_1\neq 0$

$a_1(a_2+b_2)+b_1(a_2+b_2)\neq 0$

$(a_1+b_1)(a_2+b_2)\neq 0$

Ovo je tačno za sve $a_1,a_2,b_1,b_2\in R$ zato što je $a_1\neq\pm b_1$ i $a_2\neq\pm b_2$.

Prema tome skup M je zatvoren u odnosu na operaciju množenja.

(b) asocijativnost $\forall A,B,C\in M\quad (A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$

$$\left(\begin{bmatrix} a_1&0&b_1\\0&c_1&0\\b_1&0&a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2&0&b_2\\0&c_2&0\\b_2&0&a_2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} a_3&0&b_3\\0&c_3&0\\b_3&0&a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1a_2+b_1b_2&0&a_1b_2+a_2b_1\\0&c_1c_2&0\\a_2b_1+a_1b_2&0&b_1b_2+a_1a_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_3&0&b_3\\0&c_3&0\\b_3&0&a_3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_1a_2a_3+a_3b_1b_2+a_1b_2b_3+a_2b_1b_3&0&a_1a_2b_3+b_1b_2b_3+a_1a_3b_2+a_2a_3b_1\\0&c_1c_2c_3&0\\a_2a_3b_1+a_1a_3b_2+b_1b_2b_3+a_1a_2b_3&0&a_2b_1b_3+a_1b_2b_3+a_3b_1b_2+a_1a_2a_3\end{bmatrix}\ \dots(*)$$

$$\begin{bmatrix} a_1&0&b_1\\0&c_1&0\\b_1&0&a_1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} a_2&0&b_2\\0&c_2&0\\b_2&0&a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_3&0&b_3\\0&c_3&0\\b_3&0&a_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} a_1&0&b_1\\0&c_1&0\\b_1&0&a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2a_3+b_2b_3&0&a_2b_3+a_3b_2\\0&c_2c_3&0\\a_3b_2+a_2b_3&0&b_2b_3+a_2a_3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_1a_2a_3+a_1b_2b_3+a_3b_1b_2+a_2b_1b_3&0&a_1a_2b_3+a_1a_3b_2+b_1b_2b_3+a_2a_3b_1\\0&c_1c_2c_3&0\\a_2a_3b_1+b_1b_2b_3+a_1a_3b_2+a_1a_2b_3&0&a_2b_1b_3+a_3b_1b_2+a_1b_2b_3+a_1a_2a_3\end{bmatrix}\ \dots(*)$$

$(*)=(*)$ vrijedi zakon asocijativnosti

(c) neutralni element $\forall A\in M\ \exists J\in M\quad A\cdot J=J\cdot A=A$, $J=\begin{bmatrix} x&0&y\\0&z&0\\y&0&x\end{bmatrix}$ određimo J

$$\begin{bmatrix} a&0&b\\0&c&0\\b&0&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x&0&y\\0&z&0\\y&0&x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a&0&b\\0&c&0\\b&0&a\end{bmatrix}$$

$ax+by=a\ \Rightarrow\ x=1\quad y=0$

$bx+ay=b\ \Rightarrow\ x=1\quad y=0$

$cz=c\ \Rightarrow\ z=1$

$J=\begin{bmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ $\quad x\neq\pm y$, $z\neq 0$ $\quad J\in M$

Neutralni element je jedinična matrica

(d) inverzni element $\forall A\in M\ \exists A^{-1}\in M\quad A\cdot A^{-1}=I$ $\quad A^{-1}=\begin{bmatrix} x&0&y\\0&z&0\\y&0&x\end{bmatrix}$

Kako je matrica A regularna to postoji inverzna matrica.

$$\begin{bmatrix} a&0&b\\0&c&0\\b&0&a\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x&0&y\\0&z&0\\y&0&x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ x=\frac{a}{a^2-b^2},\ y=\frac{-b}{a^2-b^2},\ z=\frac{1}{c}$$

Kako je $z\neq 0$ i $x\neq\pm y$ to $\exists$ inverzni element

Prema tome skup M u odnosu na operaciju množenja ima strukturu grupe.

Da li je grupa Abelova?

(e) komutativnost $\forall A,B\in M\quad A\cdot B=B\cdot A$

PROVJERITI SAMI $\qquad$ Grupa jest Abelova.